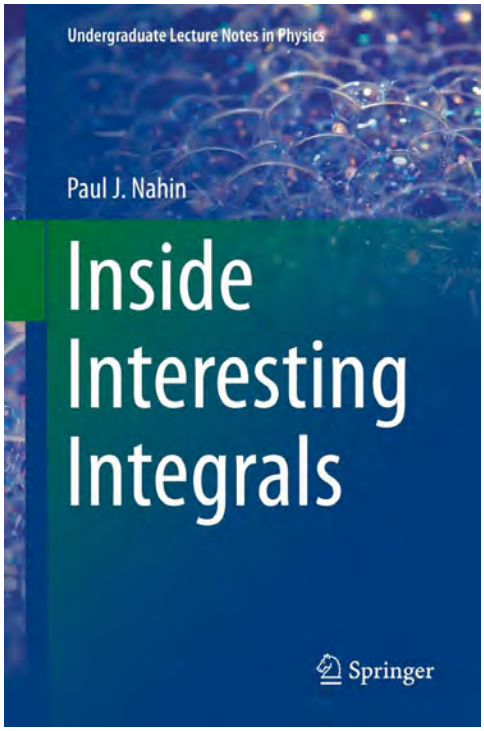
# *Inside Interesting Integrals*, de Paul Nahin

Jaume Soler
Universitat Politècnica de Catalunya

El llibre de Paul Nahin *Inside Interesting Integrals* no és un llibre estàndard de matemàtiques, i això queda clar només en llegir el llarg subtítol, a l'estil dels llibres antics: *A Collection of Sneaky Tricks, Sly Substitutions, and Numerous Other Stupendously Clever, Awesomely Wicked, and Devilishly Seductive Maneuvers for Computing Nearly 200 Perplexing Definite Integrals From Physics, Engineering, and Mathematics*. Queda palès que és un llibre escrit per algú a qui agraden les matemàtiques i probablement amb un cert sentit de l'humor.




Tots els gremis tenen les seves faccions, i el dels matemàtics no n'és una excepció: àlgebra *versus* anàlisi, matemàtica abstracta *versus* matemàtica aplicada i, no hi podia faltar, els ordinadors són indispensables versus tenen la mateixa relació amb la matemàtica que una torradora de pa (sic). Generalment, en una obra escrita es passa de puntetes sobre aquestes controvèrsies intragremials, però no és el cas de Paul Nahin, enginyer de professió, fascinat per les integrals definides, sense manies a l'hora d'expressar les seves opinions, però amb el coneixement profund de les dinàmiques gremials que s'aprèn a les institucions acadèmiques.

L'autor avisa que farà servir tots els recursos que té a l'abast i això vol dir, en particular, l'ús d'eines de càlcul numèric per fer una comprovació dels resultats que sigui independent de la teoria. Aquesta manera de procedir té un avantatge indiscutible: a més d'una comprovació (innecessària?) potser ens proporcionarà una llista d'integrals problemàtiques des del punt de vista numèric, que sempre és interessant.

El prefaci està escrit en un llenguatge viu i irònic: l'autor és perfectament conscient que, d'una banda, li poden dir que no té interès trobar expressions tancades perquè la majoria d'integrals s'han de calcular numèricament, i, de l'altra, que no té interès trobar expressions tancades perquè la teoria de la integral és molt més que una col·lecció de receptes. Però tot seguit ens fa saber que G. H. Hardy (de qui tothom recorda la frase sobre les aplicacions de la matemàtica que ell mateix va escriure a *Mathematician's Apology*) rarament podia resistir la temptació de calcular una integral definida. En efecte: «I tried very hard not to spend time on your integrals, but to me the challenge of a definite integral is irresistible», va escriure el mateix Hardy en una nota enviada a un joveníssim H. S. M. Coxeter en resposta a una pregunta d'aquest darrer, referent a una integral, publicada a la *Mathematical Gazette*. Coxeter explica aquesta anècdota a la introducció del seu llibre *Twelve Geometric Essays*. Ara sí que Paul Nahin se'ns ha posat a la butxaca als del gremi propietari de les integrals!

Que el llibre de Paul Nahin no és trivial queda clar en l'exemple següent, extret del prefaci: si calculem numèricament (tant si ho fem amb un paquet comercial com si escrivim un codi C++) la integral $I_n = \int_0^\infty \left(\prod_{k=1}^n \cos\frac{x}{k}\right)\frac{\sin 4x}{x}dx$, trobarem que per a $n \leq 30$, el resultat és sistemàticament $1.57079632679\ldots$, i s'ha de ser molt poc imaginatiu per no conjecturar que aquesta integral va $\pi/2$ per a tota $n$. Resulta, però, que per a $n = 31$ obtenim el resultat $1.57079632533\ldots$

Aquesta irritant diferència a la novena posició decimal, si la comentem amb els companys de feina, serà immediatament atribuïda, segons el gremi de qui ho digui, a 1) errors d'arrodoniment perquè hem comès el pecat de fer servir un paquet comercial en comptes d'escriure un codi C++ amb precisió quàdruple, o 2) els mètodes numèrics són una cosa i les matemàtiques una altra. Resulta, però, que la integral aquesta té una mica més de recorregut: val exactament $\pi/2$ per a $n \leq 30$, però pren un valor diferent si $n \geq 31$, i d'aquest fet n'hi ha una demostració. La integral en qüestió està relacionada amb la de $\sin(x)/x$ sobre tot el semieix positiu a través d'unes transformacions trigonomètriques senzilles. Es poden trobar els detalls a Nick Lord, «An Amusing Sequence of Trigonometric Integrals», *The Mathematical Gazette*, July 2007, p. 281–285.

Un altre exemple del llibre fa referència a un article d'Erik Talvila publicat el 2001 a *The American Mathematical Monthly*, on s'explica la història següent: una tarda avorrida de diumenge l'autor de l'article estava fullejant una taula d'integrals quan es va adonar que hi havia quatre integrals divergents conegudes que les taules donaven com a convergents. Estirant el fil, l'autor va seguir el rastre d'unes taules a unes altres, fins a les de David Bierens de Haan (1822–1895), matemàtic holandès que les va publicar el 1858 amb el títol *Tables d'intégrales définies*, probablement la primera taula d'integrals que mereix aquest nom. De Haan dona la referència de les quatre integrals... que no és cap altra que Augustin-Louis Cauchy en persona. L'error (derivar sota el signe d'integral en un cas en què no es pot fer) s'ha anat copiant d'un llibre a un altre durant gairebé 200 anys!

Al llarg del llibre, l'autor fa referència a un llibre de títol similar, *Irresistible Integrals* (Cambridge University Press) de George Boras i Victor Moll, que també porta un subtítol revelador: *Symbolics, Analysis and Experiments in the Evaluation of Integrals. Experiments?* Amb la capacitat de càlcul d'avui en dia, si una integral calculada numèricament coincideix amb log (2) amb 10.000 decimals, hi ha una certa probabilitat que valgui exactament log (2). Ja sabem que no és una demostració, però potser és bona idea tenir-ho present. Estem en aquesta terra de ningú que Jonathan Borwein anomenava (oh, heretgia!) *matemàtica experimental*.

Si Cauchy hagués disposat de la nostra capacitat de càlcul, hauria volgut comprovar numèricament la convergència d'aquelles integrals? Naturalment, no ho podem saber, però davant la temptació de descartar-ho amb un gest de la mà i dir que els grans clàssics no estaven per fer càlculs numèrics, Nahin ens recorda que entre els papers de Riemann s'hi troba un càlcul de $\sqrt{2}$, amb trenta-vuit xifres decimals!

I amb això resulta que Paul Nahin ha aconseguit reunir una col·lecció de *devilishly clever devices* que ens permeten trobar expressions tancades per a unes integrals que a primera vista són inabordables. Alguns d'aquests trucs són tant o més diabòlics perquè són molt elementals. És cert que el càlcul d'expressions exactes per a integrals definides (i podríem dir el mateix per a sumes de sèries, per exemple) té un interès relatiu. Hardy deia, referint-se a les 1.900 pàgines de càlculs del *Treatise on the Integral Calculus* que, bàsicament, la utilitat d'aquest llibre de Joseph Edwards era «recordar-nos que el segle XIX encara no havia mort». Nahin diu sense embuts que ell no està d'acord amb aquesta afirmació lleugerament malèvola, per més que Hardy sigui el gran G. H. Hardy FRS. Nosaltres aquí no hi afegirem res, *noblesse oblige*. Cent pàgines de càlculs abstrusos només per trobar una expressió tancada aporten poc a la matemàtica, però un *sneaky trick* insospitat de quatre línies...? doncs a la majoria del gremi ens passa el mateix, precisament, que a l'il·lustre matemàtic del Trinity: ens fa venir una esgarrifança.

En definitiva, ara que venen vacances, un llibre que es pot llegir a trossets, començant per qualsevol pàgina, on trobareu petites joies de l'enginy matemàtic. Gaudiu-ne.